

Einführung in die angewandte Stochastik

Übungsblatt 5

Aufgabe 18

In einer Warensendung mit 100 Transistoren befinden sich 5 defekte Stücke. Der Empfänger entnimmt der Sendung zufällig 10 Transistoren und überprüft diese. Er verweigert die Annahme der Warensendung, wenn sich unter den überprüften Transistoren mindestens 2 als defekt erweisen.

- (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
- von den 10 entnommenen Transistoren genau einer defekt ist,
 - der Empfänger die Annahme der Warensendung verweigert

unter der Voraussetzung, dass die überprüften Transistoren *nicht* wieder in die Warensendung zurückgelegt werden.

- (b) Berechnen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse aus (a) unter der Voraussetzung, dass jeder überprüfte Transistor anschließend wieder in die Warensendung zurückgelegt wird.

Aufgabe 19

Die Zeit (in Minuten gemessen) zwischen der Versendung zweier E-Mails von einem in der Kundenberatung tätigen Mitarbeiter werde durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable X mit Erwartungswert 10 (Minuten) beschrieben. Berechnen Sie

- die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass die Zeit zwischen der Versendung zweier E-Mails 10 Minuten übersteigt.
- die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass die Zeit zwischen der Versendung zweier E-Mails 20 Minuten übersteigt, bedingt darunter, dass diese mindestens 10 Minuten beträgt.

Aufgabe 20

Geben Sie zu den folgenden Situationen jeweils ein geeignetes Urnenmodell an, und berechnen Sie jeweils die Anzahl der zugehörigen möglichen Ergebnisse.

- Wie viele Händedrucke gibt es, wenn sich n Personen begrüßen und hierbei jede Person jeder anderen nur einmal die Hand gibt?
- Auf wie viele Arten können 622 Bundestagsmandate auf fünf Parteien verteilt werden?

Aufgabe 21

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit Werten in \mathbb{Z} .

Zeigen Sie: Sind X und Y stochastisch unabhängig, so gilt

$$P(X + Y = k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P(X = j)P(Y = k - j).$$

Aufgabe 22

Seien X und Y zwei Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^s e^{-(x+1)y}}{(s-1)!} & , \text{ falls } x, y > 0, \\ 0 & , \text{ sonst,} \end{cases}$$

wobei $s \in \mathbb{N}$ gelte.

- Bestimmen Sie die Randdichte f_Y von Y und geben Sie die Verteilung von Y an.
- Sei $y > 0$ gegeben. Bestimmen Sie die bedingte Dichte $f_{X|Y=y}$ von X gegeben $Y = y$. Um die Dichte welcher Verteilung handelt es sich?
- Berechnen Sie für $y > 0$ den bedingten Erwartungswert $E(X|Y = y)$ von X gegeben $Y = y$.

Hinweis: Die Gammaverteilung $\Gamma(\alpha, \beta)$ ist definiert durch die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

für Parameter $\alpha > 0$ und $\beta > 0$. Dabei bezeichnet $\Gamma(\cdot)$ die durch

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z > 0,$$

definierte Gammafunktion.