Vorlesung 7
Der Satz von Rice

Wdh.: Bisher betrachtete Probleme

Die Diagonalsprache:

$$D = \{\langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert } \langle M \rangle \text{ nicht}\}$$

Das Diagonalsprachenkomplement:

$$\overline{D} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert } \langle M \rangle\}$$

Das Halteproblem:

$$H = \{\langle M \rangle w \mid M \text{ hält auf } w\}$$

Das spezielle Halteproblem:

$$H_\epsilon = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } \epsilon\}$$

Alle diese Probleme sind unentscheidbar.

Wdh.: Beweise durch Unterprogrammtechnik

D ist unentscheidbar auf Grund eines Diagonalisierungs-Argumentes.

Wdh.: Beweise durch Unterprogrammtechnik

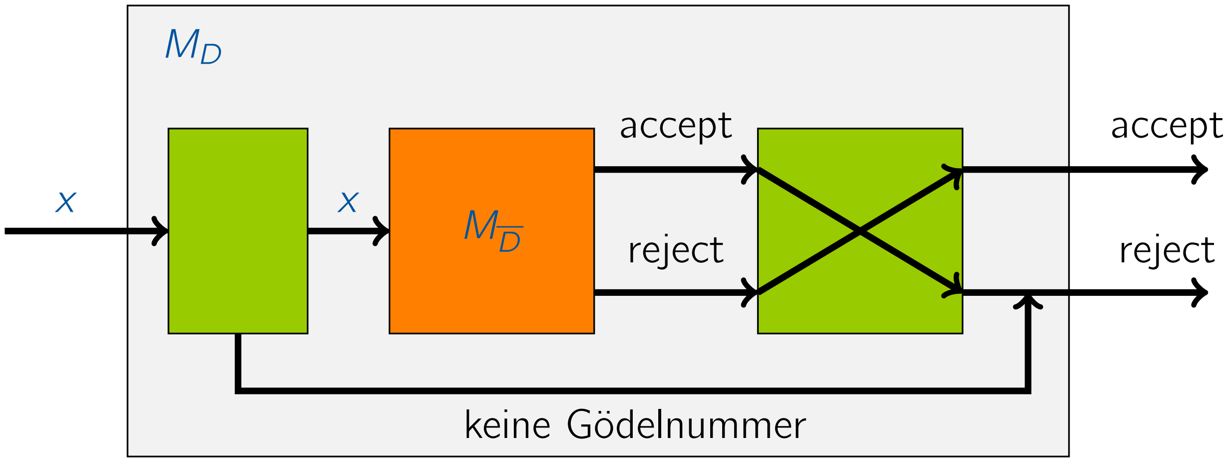
D ist unentscheidbar auf Grund eines Diagonalisierungs-Argumentes.

Die Argumentationskette war:

$$\begin{array}{ccc} D \text{ ist unentscheidbar} & \quad & M_D \\ \Downarrow & & \uparrow\!\wr \\ \overline{D} \text{ ist unentscheidbar} & & M_{\overline{D}} \end{array}$$

Vorlesung BuK im WS 22/23, M. Grohe Seite 169 Version 26. Oktober 2022

Wdh.: Unentscheidbarkeit des Komplements der Diagonalsprache



Wdh.: Beweise durch Unterprogrammtechnik

D ist unentscheidbar auf Grund eines Diagonalisierungs-Argumentes.

Die Argumentationskette war:

$$\begin{array}{ccc} D \text{ ist unentscheidbar} & & M_D \\ \Downarrow & & \uparrow \\ \overline{D} \text{ ist unentscheidbar} & & M_{\overline{D}} \end{array}$$

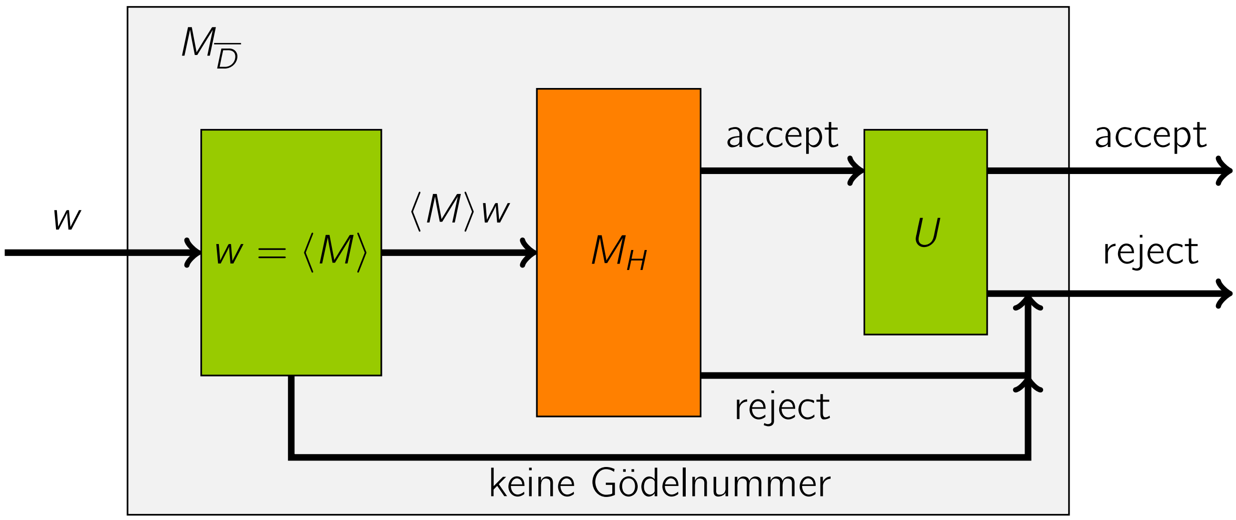
Wdh.: Beweise durch Unterprogrammtechnik

D ist unentscheidbar auf Grund eines Diagonalisierungs-Argumentes.

Die Argumentationskette war:

$$
\begin{array}{lcc}
D \text{ ist unentscheidbar} & \qquad & M_D \\
\quad\Downarrow & & \rotatebox[origin=c]{90}{$\rightsquigarrow$} \\
\overline{D} \text{ ist unentscheidbar} & & M_{\overline{D}} \\
\quad\Downarrow & & \rotatebox[origin=c]{90}{$\rightsquigarrow$} \\
H \text{ ist unentscheidbar} & & M_H
\end{array}
$$

Wdh.: Unentscheidbarkeit des Halteproblems



Wdh.: Beweise durch Unterprogrammtechnik

D ist unentscheidbar auf Grund eines Diagonalisierungs-Argumentes.

Die Argumentationskette war:

$$
\begin{array}{ccc}
D \text{ ist unentscheidbar} & \qquad & M_D \\
\Downarrow & & \rotatebox{90}{$\rightsquigarrow$} \\
\overline{D} \text{ ist unentscheidbar} & & M_{\overline{D}} \\
\Downarrow & & \rotatebox{90}{$\rightsquigarrow$} \\
H \text{ ist unentscheidbar} & & M_H
\end{array}
$$

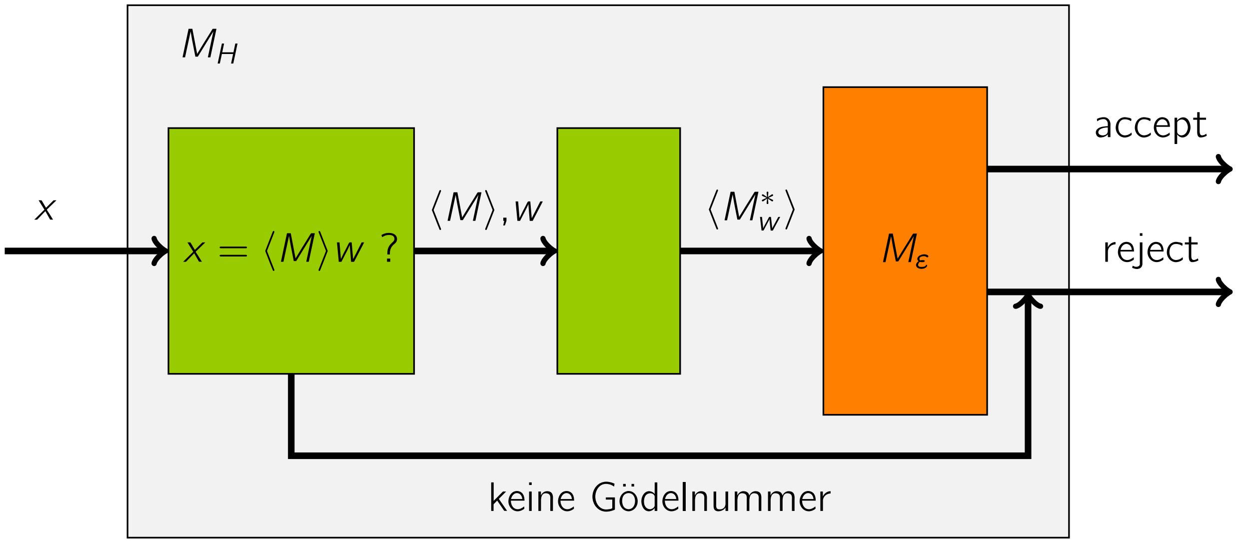
Wdh.: Beweise durch Unterprogrammtechnik

D ist unentscheidbar auf Grund eines Diagonalisierungs-Argumentes.

Die Argumentationskette war:

$$
\begin{array}{ccc}
D \text{ ist unentscheidbar} & \qquad & M_D \\
\Downarrow & & \rotatebox{90}{$\rightsquigarrow$} \\
\overline{D} \text{ ist unentscheidbar} & & M_{\overline{D}} \\
\Downarrow & & \rotatebox{90}{$\rightsquigarrow$} \\
H \text{ ist unentscheidbar} & & M_H \\
\Downarrow & & \rotatebox{90}{$\rightsquigarrow$} \\
H_\epsilon \text{ ist unentscheidbar} & & M_{H_\epsilon}
\end{array}
$$

Wdh.: Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems



Wdh.: Beweise durch Unterprogrammtechnik

D ist unentscheidbar auf Grund eines Diagonalisierungs-Argumentes.

Die Argumentationskette war:

$$
\begin{array}{cc}
D \text{ ist unentscheidbar} & M_D \\
\Downarrow & \uparrow \\
\overline{D} \text{ ist unentscheidbar} & M_{\overline{D}} \\
\Downarrow & \uparrow \\
H \text{ ist unentscheidbar} & M_H \\
\Downarrow & \uparrow \\
H_\epsilon \text{ ist unentscheidbar} & M_{H_\epsilon}
\end{array}
$$

Wdh.: Bisher betrachtete Probleme

Die Diagonalsprache:

$$D = \{\langle M\rangle \mid M \text{ akzeptiert } \langle M\rangle \text{ nicht}\}$$

Das Diagonalsprachenkomplement:

$$\overline{D} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ akzeptiert } \langle M\rangle\}$$

Das Halteproblem:

$$H = \{\langle M\rangle w \mid M \text{ hält auf } w\}$$

Das spezielle Halteproblem:

$$H_\epsilon = \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } \epsilon\}$$

Alle diese Probleme sind unentscheidbar.

Wdh.: Bisher betrachtete Probleme

Die Diagonalsprache:

$$D = \{\langle M\rangle \mid M \text{ akzeptiert } \langle M\rangle \text{ nicht}\}$$

Das Diagonalsprachenkomplement:

$$\overline{D} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ akzeptiert } \langle M\rangle\}$$

Das Halteproblem:

$$H = \{\langle M\rangle w \mid M \text{ hält auf } w\}$$

Das spezielle Halteproblem:

$$H_\epsilon = \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } \epsilon\}$$

Alle diese Probleme sind unentscheidbar.
Was haben sie strukturell gemeinsam?

Wdh.: Berechenbare partielle Funktionen

Im allgemeinen berechnet eine Turingmaschine M mit Ein- und Ausgabealphabet Σ eine partielle Funktion f_M von Σ^* nach Σ^*, die definiert ist durch

$$f_M(x) = \begin{cases} y & \text{falls } M \text{ bei Eingabe } x \text{ mit Ausgabe } y \text{ anhält,} \\ \perp \text{ (undefiniert)} & \text{falls } M \text{ bei Eingabe } x \text{ nicht anhält.} \end{cases}$$

Wdh.: Berechenbare partielle Funktionen

Im allgemeinen berechnet eine Turingmaschine M mit Ein- und Ausgabealphabet Σ eine partielle Funktion f_M von Σ^* nach Σ^*, die definiert ist durch

$$f_M(x) = \begin{cases} y & \text{falls } M \text{ bei Eingabe } x \text{ mit Ausgabe } y \text{ anhält,} \\ \perp \text{ (undefiniert)} & \text{falls } M \text{ bei Eingabe } x \text{ nicht anhält.} \end{cases}$$

Eine partielle Funktion f von Σ^* nach Σ^* ist berechenbar, wenn es eine Turingmaschine M gibt, so dass $f = f_M$.

Satz von Rice

Satz

Sei $\mathcal{R}$ die Menge der berechenbaren partiellen Funktionen und $\mathcal{S}$ eine Teilmenge von $\mathcal{R}$ mit $\emptyset \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq \mathcal{R}$. Dann ist die Sprache

$$L(\mathcal{S}) = \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\}$$

unentscheidbar.

Satz von Rice

Satz

Sei $\mathcal{R}$ die Menge der berechenbaren partiellen Funktionen und $\mathcal{S}$ eine Teilmenge von $\mathcal{R}$ mit $\emptyset \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq \mathcal{R}$. Dann ist die Sprache

$$L(\mathcal{S}) = \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\}$$

unentscheidbar.

Mit anderen Worten: Aussagen über die von einer TM berechnete Funktion sind nicht entscheidbar.

Vorlesung BuK im WS 22/23, M. Grohe Seite 178 Version 26. Oktober 2022

Satz von Rice – Anwendungsbeispiele

Beispiel 1

- Sei $\mathcal{S} = \{f_M \mid f_M(\epsilon) \neq \bot\}$.
- Dann ist

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}) &= \{\langle M\rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\} \\ &= \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } \epsilon\} \\ &= H_\epsilon \end{aligned}$$

- Gemäß Satz von Rice ist H_ϵ nicht entscheidbar.
  (Aber das wussten wir ja schon ☺.)

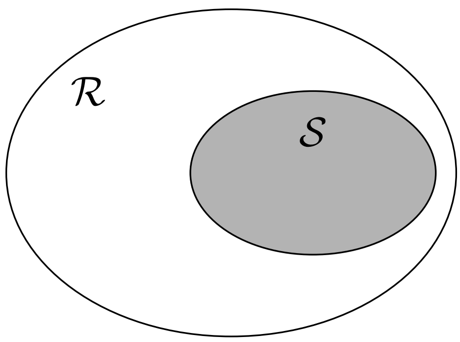
Satz von Rice – Anwendungsbeispiele

Beispiel 1

- Sei $\mathcal{S} = \{f_M \mid f_M(\epsilon) \neq \bot\}$.
- Dann ist

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}) &= \{\langle M\rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\} \\ &= \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } \epsilon\} \\ &= H_\epsilon \end{aligned}$$

- Gemäß Satz von Rice ist H_ϵ nicht entscheidbar.
  (Aber das wussten wir ja schon ☺.)



Satz von Rice – Anwendungsbeispiele

Beispiel 2

- Sei $\mathcal{S} = \{f_M \mid \forall w \in \{0,1\}^* \colon f_M(w) \neq \bot\}$.
- Dann ist

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}) &= \{\langle M\rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\} \\ &= \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält auf jeder Eingabe}\} \end{aligned}$$

- Diese Sprache ist auch als das *allgemeine Halteproblem* H_{all} bekannt.
- Gemäß Satz von Rice ist H_{all} nicht entscheidbar.

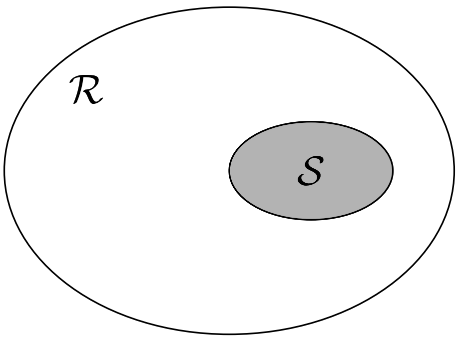
Satz von Rice – Anwendungsbeispiele

Beispiel 2

- Sei $\mathcal{S} = \{f_M \mid \forall w \in \{0,1\}^* \colon f_M(w) \neq \bot\}$.
- Dann ist

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}) &= \{\langle M\rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\} \\ &= \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält auf jeder Eingabe}\} \end{aligned}$$

- Diese Sprache ist auch als das *allgemeine Halteproblem* H_{all} bekannt.
- Gemäß Satz von Rice ist H_{all} nicht entscheidbar.



Satz von Rice – Anwendungsbeispiele

Beispiel 3

- Sei $\mathcal{S} = \{f_M \mid \forall w \in \{0,1\}^* \colon f_M(w) = 1\}$.
- Dann ist

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}) &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\} \\ &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf jeder Eingabe mit Ausgabe } 1\} \end{aligned}$$

- Gemäß Satz von Rice ist $L(\mathcal{S})$ nicht entscheidbar.

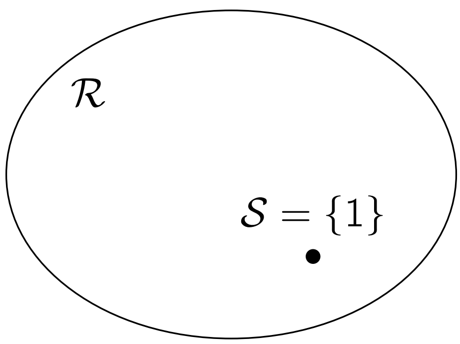
Satz von Rice – Anwendungsbeispiele

Beispiel 3

- Sei $\mathcal{S} = \{f_M \mid \forall w \in \{0,1\}^* \colon f_M(w) = 1\}$.
- Dann ist

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}) &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\} \\ &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf jeder Eingabe mit Ausgabe } 1\} \end{aligned}$$

- Gemäß Satz von Rice ist $L(\mathcal{S})$ nicht entscheidbar.



Satz von Rice – Beweis

Satz

Sei $\mathcal{R}$ die Menge der von TMen berechenbaren partiellen Funktionen und $\mathcal{S}$ eine Teilmenge von $\mathcal{R}$ mit $\emptyset \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq \mathcal{R}$. Dann ist die Sprache

$$L(\mathcal{S}) = \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\}$$

unentscheidbar.

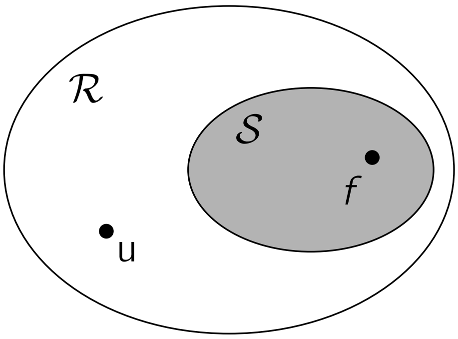
Satz von Rice – Beweis

Beweis

Wir nutzen die Unterprogrammtechnik. Aus einer TM $M_{L(\mathcal{S})}$, die $L(\mathcal{S})$ entscheidet, konstruieren wir eine TM M_{H_ϵ}, die das spezielle Halteproblem H_ϵ entscheidet.

Einige Vereinbarungen:

- Sei u die überall undefinierte Funktion.
- O.B.d.A. $u \notin \mathcal{S}$.



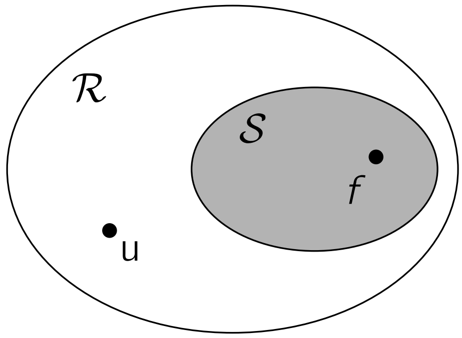
Satz von Rice – Beweis

Beweis

Wir nutzen die Unterprogrammtechnik. Aus einer TM $M_{L(\mathcal{S})}$, die $L(\mathcal{S})$ entscheidet, konstruieren wir eine TM M_{H_ϵ}, die das spezielle Halteproblem H_ϵ entscheidet.

Einige Vereinbarungen:

- Sei u die überall undefinierte Funktion.
- O.B.d.A. $u \notin \mathcal{S}$.



Bemerkung: Im Falle $u \in \mathcal{S}$ betrachten wir $\mathcal{R} \setminus \mathcal{S}$ statt $\mathcal{S}$ und zeigen die Unentscheidbarkeit von $L(\mathcal{R} \setminus \mathcal{S})$. Hieraus ergibt sich dann unmittelbar die Unentscheidbarkeit von $L(\mathcal{S})$.

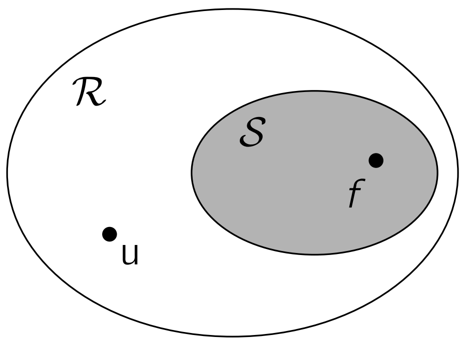
Satz von Rice – Beweis

Beweis

Wir nutzen die Unterprogrammtechnik. Aus einer TM $M_{L(\mathcal{S})}$, die $L(\mathcal{S})$ entscheidet, konstruieren wir eine TM M_{H_ϵ}, die das spezielle Halteproblem H_ϵ entscheidet.

Einige Vereinbarungen:

- Sei u die überall undefinierte Funktion.
- O.B.d.A. $u \notin \mathcal{S}$.
- Sei f eine Funktion aus $\mathcal{S}$.
- Sei N eine TM, die f berechnet.



Bemerkung: Im Falle $u \in \mathcal{S}$ betrachten wir $\mathcal{R} \setminus \mathcal{S}$ statt $\mathcal{S}$ und zeigen die Unentscheidbarkeit von $L(\mathcal{R} \setminus \mathcal{S})$. Hieraus ergibt sich dann unmittelbar die Unentscheidbarkeit von $L(\mathcal{S})$.

Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Die TM M_{H_ϵ} mit Unterprogramm $M_{L(\mathcal{S})}$ arbeitet wie folgt

1)

1) Teste, ob w Gödelnummer. Wenn nicht, verwerfe.
   Sonst sei M die TM mit $w = \langle M \rangle$

Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Die TM M_{H_ϵ} mit Unterprogramm $M_{L(\mathcal{S})}$ arbeitet wie folgt

1)

1) Teste, ob w Gödelnummer. Wenn nicht, verwerfe.
   Sonst sei M die TM mit $w = \langle M \rangle$
2) Sonst berechnet M_{H_ϵ} aus der Eingabe $\langle M \rangle$ die Gödelnummer der TM M^* (nächste Folie).

Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Die TM M_{H_ϵ} mit Unterprogramm $M_{L(\mathcal{S})}$ arbeitet wie folgt

1)

1) Teste, ob w Gödelnummer. Wenn nicht, verwerfe.
   Sonst sei M die TM mit $w = \langle M \rangle$
2) Sonst berechnet M_{H_ϵ} aus der Eingabe $\langle M \rangle$ die Gödelnummer der TM M^* (nächste Folie).
3) Starte $M_{L(\mathcal{S})}$ mit der Eingabe $\langle M^* \rangle$ und akzeptiere (verwirf) genau dann, wenn $M_{L(\mathcal{S})}$ akzeptiert (verwirft).

Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Verhalten von M^* auf Eingabe x

Phase A: Simuliere das Verhalten von M bei Eingabe ϵ auf einer für diesen Zweck reservierten Spur.

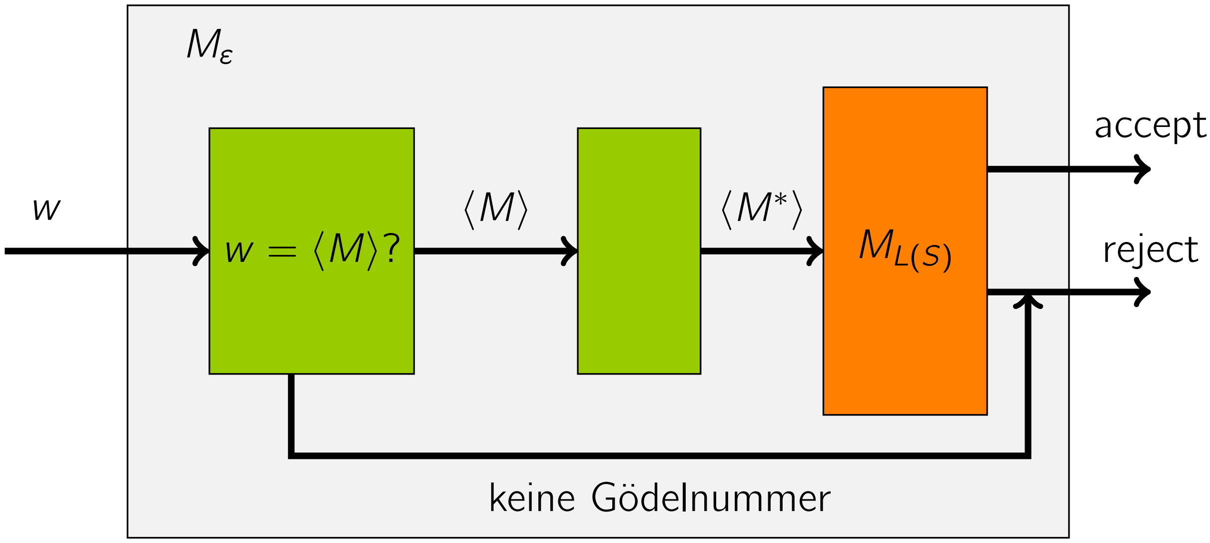
Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

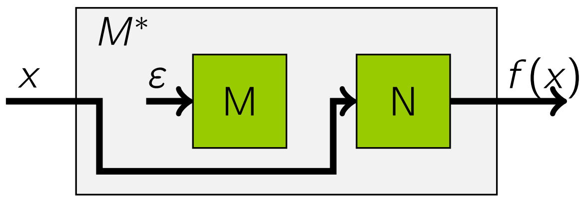
Verhalten von M^* auf Eingabe x

Phase A: Simuliere das Verhalten von M bei Eingabe ϵ auf einer für diesen Zweck reservierten Spur.

Phase B: Simuliere das Verhalten von N auf x, halte, sobald N hält, und übernimm die Ausgabe.

Satz von Rice – Illustration





Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Korrektheit:

Bei Eingabe von w, wobei w keine Gödelnummer ist, verwirft M_{H_ϵ}.

Bei Eingabe von $w = \langle M \rangle$ gilt:

$$w \in H_\epsilon$$

Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Korrektheit:

Bei Eingabe von w, wobei w keine Gödelnummer ist, verwirft M_{H_ϵ}.

Bei Eingabe von $w = \langle M \rangle$ gilt:

$$w \in H_\epsilon \quad \Rightarrow \quad M \text{ hält auf } \epsilon$$

Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Korrektheit:

Bei Eingabe von w, wobei w keine Gödelnummer ist, verwirft M_{H_ϵ}.

Bei Eingabe von $w = \langle M \rangle$ gilt:

$$\begin{aligned} w \in H_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad M^* \text{ berechnet } f \end{aligned}$$

Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Korrektheit:

Bei Eingabe von w, wobei w keine Gödelnummer ist, verwirft M_{H_ϵ}.

Bei Eingabe von $w = \langle M \rangle$ gilt:

$$\begin{aligned} w \in H_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad M^* \text{ berechnet } f \\ &\overset{f \in \mathcal{S}}{\Rightarrow} \quad \langle M^* \rangle \in L(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Korrektheit:

Bei Eingabe von w, wobei w keine Gödelnummer ist, verwirft M_{H_ϵ}.

Bei Eingabe von $w = \langle M \rangle$ gilt:

$$
\begin{aligned}
w \in H_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad M^* \text{ berechnet } f \\
&\overset{f \in \mathcal{S}}{\Rightarrow} \quad \langle M^* \rangle \in L(\mathcal{S}) \\
&\Rightarrow \quad M_{L(\mathcal{S})} \text{ akzeptiert } \langle M^* \rangle
\end{aligned}
$$

Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Korrektheit:

Bei Eingabe von w, wobei w keine Gödelnummer ist, verwirft M_{H_ϵ}.

Bei Eingabe von $w = \langle M \rangle$ gilt:

$$
\begin{aligned}
w \in H_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad M^* \text{ berechnet } f \\
&\overset{f \in \mathcal{S}}{\Rightarrow} \quad \langle M^* \rangle \in L(\mathcal{S}) \\
&\Rightarrow \quad M_{L(\mathcal{S})} \text{ akzeptiert } \langle M^* \rangle \\
&\Rightarrow \quad M_{H_\epsilon} \text{ akzeptiert } w
\end{aligned}
$$

Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Korrektheit:

Bei Eingabe von w, wobei w keine Gödelnummer ist, verwirft M_{H_ϵ}.

Bei Eingabe von $w = \langle M \rangle$ gilt:

$$\begin{aligned} w \in H_\epsilon &\Rightarrow M \text{ hält auf } \epsilon \\ &\Rightarrow M^* \text{ berechnet } f \\ &\overset{f \in \mathcal{S}}{\Rightarrow} \langle M^* \rangle \in L(\mathcal{S}) \\ &\Rightarrow M_{L(\mathcal{S})} \text{ akzeptiert } \langle M^* \rangle \\ &\Rightarrow M_{H_\epsilon} \text{ akzeptiert } w \end{aligned}$$

$$w \notin H_\epsilon$$

Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Korrektheit:

Bei Eingabe von w, wobei w keine Gödelnummer ist, verwirft M_{H_ϵ}.

Bei Eingabe von $w = \langle M \rangle$ gilt:

$$\begin{aligned} w \in H_\epsilon &\Rightarrow M \text{ hält auf } \epsilon \\ &\Rightarrow M^* \text{ berechnet } f \\ &\overset{f \in \mathcal{S}}{\Rightarrow} \langle M^* \rangle \in L(\mathcal{S}) \\ &\Rightarrow M_{L(\mathcal{S})} \text{ akzeptiert } \langle M^* \rangle \\ &\Rightarrow M_{H_\epsilon} \text{ akzeptiert } w \end{aligned}$$

$$w \notin H_\epsilon \Rightarrow M \text{ hält nicht auf } \epsilon$$

Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Korrektheit:

Bei Eingabe von w, wobei w keine Gödelnummer ist, verwirft M_{H_ϵ}.

Bei Eingabe von $w = \langle M \rangle$ gilt:

$$\begin{aligned} w \in H_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad M^* \text{ berechnet } f \\ &\overset{f \in \mathcal{S}}{\Rightarrow} \quad \langle M^* \rangle \in L(\mathcal{S}) \\ &\Rightarrow \quad M_{L(\mathcal{S})} \text{ akzeptiert } \langle M^* \rangle \\ &\Rightarrow \quad M_{H_\epsilon} \text{ akzeptiert } w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w \notin H_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad M^* \text{ berechnet } u \end{aligned}$$

Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Korrektheit:

Bei Eingabe von w, wobei w keine Gödelnummer ist, verwirft M_{H_ϵ}.

Bei Eingabe von $w = \langle M \rangle$ gilt:

$$\begin{aligned} w \in H_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad M^* \text{ berechnet } f \\ &\overset{f \in \mathcal{S}}{\Rightarrow} \quad \langle M^* \rangle \in L(\mathcal{S}) \\ &\Rightarrow \quad M_{L(\mathcal{S})} \text{ akzeptiert } \langle M^* \rangle \\ &\Rightarrow \quad M_{H_\epsilon} \text{ akzeptiert } w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w \notin H_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad M^* \text{ berechnet } u \\ &\overset{u \notin \mathcal{S}}{\Rightarrow} \quad \langle M^* \rangle \notin L(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Korrektheit:

Bei Eingabe von w, wobei w keine Gödelnummer ist, verwirft M_{H_ϵ}.

Bei Eingabe von $w = \langle M \rangle$ gilt:

$$\begin{aligned}
w \in H_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad M^* \text{ berechnet } f \\
&\overset{f \in \mathcal{S}}{\Rightarrow} \quad \langle M^* \rangle \in L(\mathcal{S}) \\
&\Rightarrow \quad M_{L(\mathcal{S})} \text{ akzeptiert } \langle M^* \rangle \\
&\Rightarrow \quad M_{H_\epsilon} \text{ akzeptiert } w
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w \notin H_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad M^* \text{ berechnet } u \\
&\overset{u \notin \mathcal{S}}{\Rightarrow} \quad \langle M^* \rangle \notin L(\mathcal{S}) \\
&\Rightarrow \quad M_{L(\mathcal{S})} \text{ verwirft } \langle M^* \rangle
\end{aligned}$$

Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Korrektheit:

Bei Eingabe von w, wobei w keine Gödelnummer ist, verwirft M_{H_ϵ}.

Bei Eingabe von $w = \langle M \rangle$ gilt:

$$\begin{aligned}
w \in H_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad M^* \text{ berechnet } f \\
&\overset{f \in \mathcal{S}}{\Rightarrow} \quad \langle M^* \rangle \in L(\mathcal{S}) \\
&\Rightarrow \quad M_{L(\mathcal{S})} \text{ akzeptiert } \langle M^* \rangle \\
&\Rightarrow \quad M_{H_\epsilon} \text{ akzeptiert } w
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w \notin H_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad M^* \text{ berechnet } u \\
&\overset{u \notin \mathcal{S}}{\Rightarrow} \quad \langle M^* \rangle \notin L(\mathcal{S}) \\
&\Rightarrow \quad M_{L(\mathcal{S})} \text{ verwirft } \langle M^* \rangle \\
&\Rightarrow \quad M_{H_\epsilon} \text{ verwirft } w
\end{aligned}$$

$\square$

Vorlesung BuK im WS 22/23, M. Grohe Seite 186 Version 26. Oktober 2022

Satz von Rice – Weitere Anwendungsbeispiele

Beispiel 4

- Sei
  $L_{17} = \{\langle M \rangle \mid M$ berechnet bei Eingabe der Zahl 17 die Zahl 42$\}$.

Satz von Rice – Weitere Anwendungsbeispiele

Beispiel 4

- Sei
  $L_{17} = \{\langle M \rangle \mid M$ berechnet bei Eingabe der Zahl 17 die Zahl 42$\}$.
- Es ist $L_{17} = L(\mathcal{S})$ für $\mathcal{S} = \{f_M \mid f_M(\mathrm{bin}(17)) = \mathrm{bin}(42)\}$.

Satz von Rice – Weitere Anwendungsbeispiele

Beispiel 4

- Sei
  $L_{17} = \{\langle M \rangle \mid M$ berechnet bei Eingabe der Zahl 17 die Zahl $42\}$.
- Es ist $L_{17} = L(\mathcal{S})$ für $\mathcal{S} = \{f_M \mid f_M(\mathrm{bin}(17)) = \mathrm{bin}(42)\}$.
- Somit, (da $\emptyset \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq \mathcal{R}$), ist diese Sprache gemäß des Satzes von Rice nicht entscheidbar.

Satz von Rice – Weitere Anwendungsbeispiele

Beispiel 4

- Sei
  $L_{17} = \{\langle M \rangle \mid M$ berechnet bei Eingabe der Zahl 17 die Zahl $42\}$.
- Es ist $L_{17} = L(\mathcal{S})$ für $\mathcal{S} = \{f_M \mid f_M(\mathrm{bin}(17)) = \mathrm{bin}(42)\}$.
- Somit, (da $\emptyset \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq \mathcal{R}$), ist diese Sprache gemäß des Satzes von Rice nicht entscheidbar.

Beispiel 5

- Sei $H_{42} = \{\langle M \rangle \mid$
  Auf jeder Eingabe hält M nach höchstens 42 Schritten$\}$.

Satz von Rice – Weitere Anwendungsbeispiele

Beispiel 4

- Sei
  $L_{17} = \{\langle M \rangle \mid M$ berechnet bei Eingabe der Zahl 17 die Zahl 42$\}$.
- Es ist $L_{17} = L(\mathcal{S})$ für $\mathcal{S} = \{f_M \mid f_M(\text{bin}(17)) = \text{bin}(42)\}$.
- Somit, (da $\emptyset \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq \mathcal{R}$), ist diese Sprache gemäß des Satzes von Rice nicht entscheidbar.

Beispiel 5

- Sei $H_{42} = \{\langle M \rangle \mid$
  Auf jeder Eingabe hält M nach höchstens 42 Schritten$\}$.
- Über diese Sprache sagt der Satz von Rice nichts aus!

Satz von Rice – Weitere Anwendungsbeispiele

Beispiel 4

- Sei
  $L_{17} = \{\langle M \rangle \mid M$ berechnet bei Eingabe der Zahl 17 die Zahl 42$\}$.
- Es ist $L_{17} = L(\mathcal{S})$ für $\mathcal{S} = \{f_M \mid f_M(\text{bin}(17)) = \text{bin}(42)\}$.
- Somit, (da $\emptyset \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq \mathcal{R}$), ist diese Sprache gemäß des Satzes von Rice nicht entscheidbar.

Beispiel 5

- Sei $H_{42} = \{\langle M \rangle \mid$
  Auf jeder Eingabe hält M nach höchstens 42 Schritten$\}$.
- Über diese Sprache sagt der Satz von Rice nichts aus!
- Ist H_{42} entscheidbar?

Satz von Rice für C++ Programme

Konsequenz für C++
Es gibt keine algorithmische Methode (von Hand oder automatisiert) festzustellen, ob ein C++ Programm einer (nicht-trivialen) Spezifikation entspricht.

Die analoge Konsequenz gilt auch für ähnliche Programmiersprachen wie Java.

Satz von Rice – Weitere Anwendungsbeispiele

Beispiel 6

- Sei $L_D = \{\langle M \rangle \mid M \text{ entscheidet die Diagonalsprache}\}$.

Satz von Rice – Weitere Anwendungsbeispiele

Beispiel 6

- Sei $L_D = \{\langle M\rangle \mid M \text{ entscheidet die Diagonalsprache}\}$.
- Dann ist $L_D = L(\mathcal{S})$ für $\mathcal{S} = \{f_D\}$ wobei

$$f_D(w) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } w \in D \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz von Rice – Weitere Anwendungsbeispiele

Beispiel 6

- Sei $L_D = \{\langle M\rangle \mid M \text{ entscheidet die Diagonalsprache}\}$.
- Dann ist $L_D = L(\mathcal{S})$ für $\mathcal{S} = \{f_D\}$ wobei

$$f_D(w) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } w \in D \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Über diese Sprache sagt der Satz von Rice nichts aus!

Satz von Rice – Weitere Anwendungsbeispiele

Beispiel 6

- Sei $L_D = \{\langle M \rangle \mid M \text{ entscheidet die Diagonalsprache}\}$.
- Dann ist $L_D = L(\mathcal{S})$ für $\mathcal{S} = \{f_D\}$ wobei

$$f_D(w) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } w \in D \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Über diese Sprache sagt der Satz von Rice nichts aus!
- Aber: Diese Sprache ist entscheidbar, denn $L_D = \{\}$.

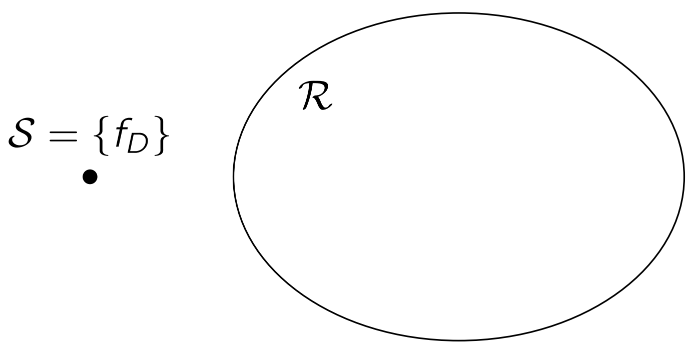
Satz von Rice – Weitere Anwendungsbeispiele

Beispiel 6

- Sei $L_D = \{\langle M \rangle \mid M \text{ entscheidet die Diagonalsprache}\}$.
- Dann ist $L_D = L(\mathcal{S})$ für $\mathcal{S} = \{f_D\}$ wobei

$$f_D(w) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } w \in D \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Über diese Sprache sagt der Satz von Rice nichts aus!
- Aber: Diese Sprache ist entscheidbar, denn $L_D = \{\}$.



Collatz Problem

Erinnerung an die Iterationsgleichung

$$x \leftarrow \begin{cases} x/2 & \text{wenn } x \text{ gerade} \\ 3x+1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Collatz-Problem ist eine Instanz des allgemeinen Halteproblems.

Wir wissen nicht, ob diese Instanz eine Ja- oder eine Nein-Instanz ist.