

Vorlesung 3

Mehrband-Turingmaschinen und die universelle Turingmaschine

Wdh.: Kodierung von Berechnungsproblemen

3 mögliche formale Definitionen.

Als **Relation**:

▶ Primfaktor:

$(110, 11) \in R$

$(101, 11) \notin R$

$(00110, 11) \notin R$

▶ Multiplikation

$(11\#10, 110) \in R$

$(11\#10, 11) \notin R$

$(1\#1\#0, 110) \notin R$

▶ Wörter die auf 1 enden.

$(11, 1) \in R$

$(110, 1) \notin R$

$(10, 0) \in R$

Als **Funktion**

$f(11\#10) = 110$

$(f(1\#1\#0) = \perp)$

$f(11) = 1$

$f(110) = 0$

Als **Sprache**

$11 \in L$

$110 \notin L$

Wdh.: Turingmaschinen

Wdh.: Turingmaschinen

Anschauliche Definition:



δ	0	1	B
q_1	$(q_1, 1, L)$	$(q_2, 1, R)$	(q_1, B, N)
q_2	(q_3, B, R)	$(q_1, 0, L)$	(q_3, B, R)
q_3	$(q_2, 0, N)$	$(q_2, 0, R)$	(q_3, B, R)



Formale Definition:

Eine Turingmaschine ist ein 7-Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, \bar{q}, \delta)$, wobei

- ▶ Q, Σ, Γ endliche Mengen sind,
- ▶ $\Sigma \subseteq \Gamma$,
- ▶ $B \in \Gamma \setminus \Sigma$,
- ▶ $q_0, \bar{q} \in Q$ und
- ▶ $\delta: (Q \setminus \{\bar{q}\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{R, L, N\}$.

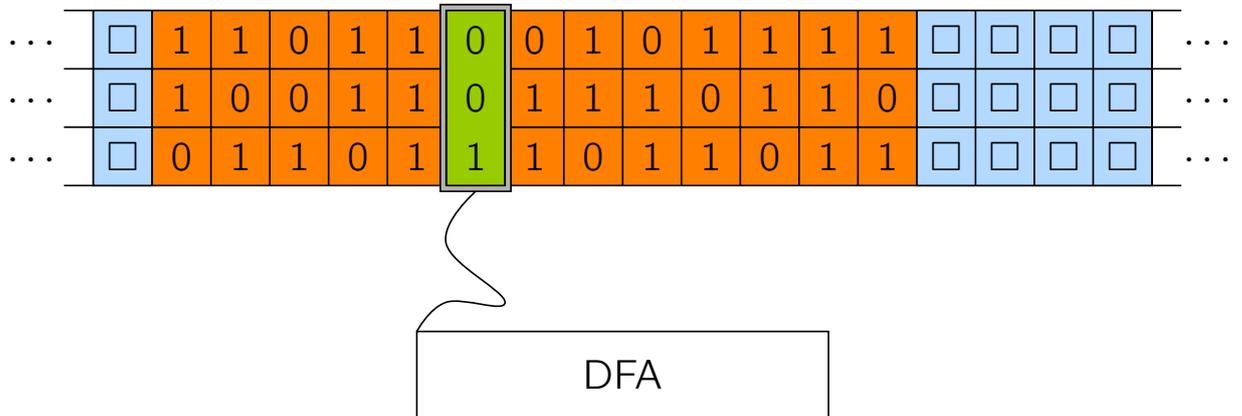
Wdh.: TM-Techniken

- Speicher im Zustandsraum:

$$Q_{\text{neu}} := Q \times \Gamma^k$$

- Mehrspurmaschinen:

$$\Gamma_{\text{neu}} := \Gamma \cup \Gamma^k$$



- Schleifen, Variablen, Felder (Arrays), Unterprogramme

Turingmaschinen mit mehreren Bändern

Turingmaschinen mit mehreren Bändern

k -Band-TM

Eine k -Band-TM ist eine Verallgemeinerung der Turingmaschine und verfügt über k Arbeitsbänder mit jeweils einem unabhängigen Kopf. Die Zustandsübergangsfunktion ist entsprechend von der Form

$$\delta : (Q \setminus \{\bar{q}\}) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k .$$

- ▶ Band 1 fungiert als Ein-/Ausgabeband wie bei der (1-Band-)TM.
- ▶ Die Zellen der Bänder $2, \dots, k$ sind initial leer (ausschließlich B).

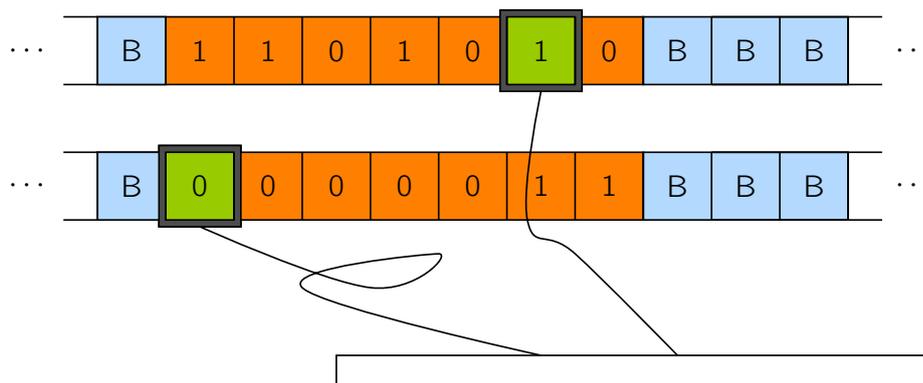
Turingmaschinen mit mehreren Bändern

k -Band-TM

Eine k -Band-TM ist eine Verallgemeinerung der Turingmaschine und verfügt über k Arbeitsbänder mit jeweils einem unabhängigen Kopf. Die Zustandsübergangsfunktion ist entsprechend von der Form

$$\delta : (Q \setminus \{\bar{q}\}) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k .$$

- ▶ Band 1 fungiert als Ein-/Ausgabeband wie bei der (1-Band-)TM.
- ▶ Die Zellen der Bänder $2, \dots, k$ sind initial leer (ausschließlich B).



Simulation k -Band-TM durch 1-Band-TM

Satz

Eine k -Band-TM M , die mit Rechenzeit $t(n)$ und Platz $s(n)$ auskommt, kann von einer (1-Band-)TM M' mit Zeitbedarf $O(t^2(n))$ und Platzbedarf $O(s(n))$ simuliert werden.

Simulation k -Band-TM durch 1-Band-TM

Satz

Eine k -Band-TM M , die mit Rechenzeit $t(n)$ und Platz $s(n)$ auskommt, kann von einer (1-Band-)TM M' mit Zeitbedarf $O(t^2(n))$ und Platzbedarf $O(s(n))$ simuliert werden.

Beweisskizze

Die TM M' verwendet $2k$ Spuren. Nach Simulation des t -ten Schrittes für $0 \leq t \leq t(n)$ gilt

- ▶ Die ungeraden Spuren $1, 3, \dots, 2k - 1$ enthalten den Inhalt der Bänder $1, \dots, k$ von M .

Simulation k -Band-TM durch 1-Band-TM

Satz

Eine k -Band-TM M , die mit Rechenzeit $t(n)$ und Platz $s(n)$ auskommt, kann von einer (1-Band-)TM M' mit Zeitbedarf $O(t^2(n))$ und Platzbedarf $O(s(n))$ simuliert werden.

Beweisskizze

Die TM M' verwendet $2k$ Spuren. Nach Simulation des t -ten Schrittes für $0 \leq t \leq t(n)$ gilt

- ▶ Die ungeraden Spuren $1, 3, \dots, 2k - 1$ enthalten den Inhalt der Bänder $1, \dots, k$ von M .
- ▶ Auf den geraden Spuren $2, 4, \dots, 2k$ sind die Kopfpositionen auf diesen Bändern mit dem Zeichen $\#$ markiert.

Simulation k -Band-TM durch 1-Band-TM

Satz

Eine k -Band-TM M , die mit Rechenzeit $t(n)$ und Platz $s(n)$ auskommt, kann von einer (1-Band-)TM M' mit Zeitbedarf $O(t^2(n))$ und Platzbedarf $O(s(n))$ simuliert werden.

Beweisskizze

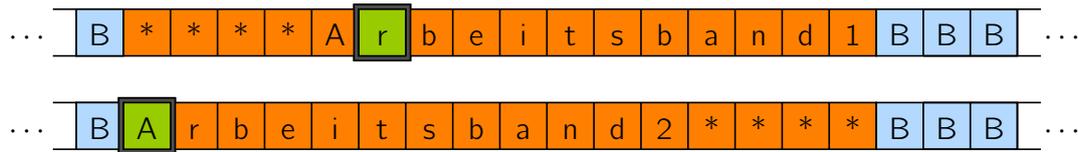
Die TM M' verwendet $2k$ Spuren. Nach Simulation des t -ten Schrittes für $0 \leq t \leq t(n)$ gilt

- ▶ Die ungeraden Spuren $1, 3, \dots, 2k - 1$ enthalten den Inhalt der Bänder $1, \dots, k$ von M .
- ▶ Auf den geraden Spuren $2, 4, \dots, 2k$ sind die Kopfpositionen auf diesen Bändern mit dem Zeichen $\#$ markiert.

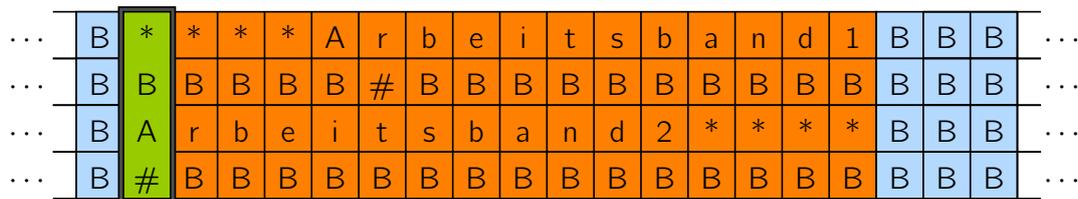
Diese Initialisierung der Spuren ist in Zeit $O(1)$ möglich.

Simulation k -Band-TM durch 1-Band-TM – Illustration

simulierte 2-Band-Turingmaschine M



simulierende 4-Spur-Turingmaschine M' (zu Beginn des Simulationsschrittes)



Simulation k -Band-TM durch 1-Band-TM – Beweis

Jeder Rechenschritt von M wird durch M' wie folgt simuliert.

- ▶ Am Anfang stehe der Kopf von M' auf der linkensten Zelle, die $\#$ enthält, und M' kenne den Zustand von M .

Simulation k -Band-TM durch 1-Band-TM – Beweis

Jeder Rechenschritt von M wird durch M' wie folgt simuliert.

- ▶ Am Anfang stehe der Kopf von M' auf der linkesten Zelle, die $\#$ enthält, und M' kenne den Zustand von M .
- ▶ Der Kopf von M' läuft nach rechts bis zum rechtesten $\#$, wobei die k Zeichen an den mit $\#$ markierten Spurpositionen im Zustand abgespeichert werden.

Simulation k -Band-TM durch 1-Band-TM – Beweis

Jeder Rechenschritt von M wird durch M' wie folgt simuliert.

- ▶ Am Anfang stehe der Kopf von M' auf der linkesten Zelle, die $\#$ enthält, und M' kenne den Zustand von M .
- ▶ Der Kopf von M' läuft nach rechts bis zum rechtesten $\#$, wobei die k Zeichen an den mit $\#$ markierten Spurpositionen im Zustand abgespeichert werden.
- ▶ An der Zelle mit dem rechtesten $\#$ -Zeichen angekommen, kann M' die Übergangsfunktion von M auswerten und kennt den neuen Zustand von M sowie die erforderlichen Übergänge auf den k Bändern.

Simulation k -Band-TM durch 1-Band-TM – Beweis

Jeder Rechenschritt von M wird durch M' wie folgt simuliert.

- ▶ Am Anfang stehe der Kopf von M' auf der linkesten Zelle, die $\#$ enthält, und M' kenne den Zustand von M .
- ▶ Der Kopf von M' läuft nach rechts bis zum rechtesten $\#$, wobei die k Zeichen an den mit $\#$ markierten Spurpositionen im Zustand abgespeichert werden.
- ▶ An der Zelle mit dem rechtesten $\#$ -Zeichen angekommen, kann M' die Übergangsfunktion von M auswerten und kennt den neuen Zustand von M sowie die erforderlichen Übergänge auf den k Bändern.
- ▶ Nun läuft der Kopf von M' zurück, verändert dabei die Bandinschriften an den mit $\#$ markierten Stellen und verschiebt, falls erforderlich, auch die $\#$ -Markierungen um eine Position nach links oder rechts.

Simulation k -Band-TM durch 1-Band-TM – Beweis

Laufzeitanalyse:

Wieviele Bandpositionen können zwischen dem linkesten und dem rechtesten $\#$ liegen?

Simulation k -Band-TM durch 1-Band-TM – Beweis

Laufzeitanalyse:

Wieviele Bandpositionen können zwischen dem linken und dem rechten $\#$ liegen?

Nach t Schritten können diese Markierungen höchstens $2t$ Positionen auseinanderliegen.

Also ist der Abstand zwischen diesen Zeichen und somit auch die Laufzeit zur Simulation eines Schrittes durch $O(t(n))$ beschränkt.

Simulation k -Band-TM durch 1-Band-TM – Beweis

Laufzeitanalyse:

Wieviele Bandpositionen können zwischen dem linken und dem rechten $\#$ liegen?

Nach t Schritten können diese Markierungen höchstens $2t$ Positionen auseinanderliegen.

Also ist der Abstand zwischen diesen Zeichen und somit auch die Laufzeit zur Simulation eines Schrittes durch $O(t(n))$ beschränkt.

Insgesamt ergibt das zur Simulation von $t(n)$ Schritten eine Laufzeitschranke von $O(t(n)^2)$. □

Special versus General Purpose Rechner

- ▶ Bisher haben wir für jedes Problem eine eigene TM entworfen, einen **special purpose** Rechner.

Special versus General Purpose Rechner

- ▶ Bisher haben wir für jedes Problem eine eigene TM entworfen, einen **special purpose** Rechner.
- ▶ Real existierende Maschinen sind jedoch programmierbare **general purpose** Rechner.

Special versus General Purpose Rechner

- ▶ Bisher haben wir für jedes Problem eine eigene TM entworfen, einen **special purpose** Rechner.
- ▶ Real existierende Maschinen sind jedoch programmierbare **general purpose** Rechner.
- ▶ Wir konstruieren jetzt eine programmierbare Variante der TM, die sogenannte **universelle TM**.

Ein-/Ausgabeverhalten der universellen TM

- ▶ Das Programm der **universellen TM** U ist die Kodierung einer beliebigen TM M .

Ein-/Ausgabeverhalten der universellen TM

- ▶ Das Programm der **universellen TM** U ist die Kodierung einer beliebigen TM M .
- ▶ Mit $\langle M \rangle$ bezeichnen wir diese Kodierung der TM M .
- ▶ Als Eingabe erhält U einen String der Form $\langle M \rangle w$ bestehend aus einer TM-Kodierung $\langle M \rangle$ und einem Wort w .

Ein-/Ausgabeverhalten der universellen TM

- ▶ Das Programm der **universellen TM** U ist die Kodierung einer beliebigen TM M .
- ▶ Mit $\langle M \rangle$ bezeichnen wir diese Kodierung der TM M .
- ▶ Als Eingabe erhält U einen String der Form $\langle M \rangle w$ bestehend aus einer TM-Kodierung $\langle M \rangle$ und einem Wort w .
- ▶ Die universelle TM simuliert das Verhalten der TM M auf der Eingabe w .

Ein-/Ausgabeverhalten der universellen TM

- ▶ Das Programm der **universellen TM** U ist die Kodierung einer beliebigen TM M .
- ▶ Mit $\langle M \rangle$ bezeichnen wir diese Kodierung der TM M .
- ▶ Als Eingabe erhält U einen String der Form $\langle M \rangle w$ bestehend aus einer TM-Kodierung $\langle M \rangle$ und einem Wort w .
- ▶ Die universelle TM simuliert das Verhalten der TM M auf der Eingabe w .
- ▶ Bei inkorrektter Eingabe (d.h., die Eingabe beginnt nicht mit einer TM-Kodierung) gibt U eine Fehlermeldung aus.

Gödelnummern

Wir entwickeln nun eine eindeutige präfixfreie Kodierung, die einer Turingmaschine M ein Wort $\langle M \rangle$ über dem Alphabet $\{0, 1\}$ zuordnet.

Definition

Wir nennen die Kodierung $\langle M \rangle$ die **Gödelnummer** der Turingmaschine M .

- ▶ *Präfixfrei* bedeutet, dass keine Gödelnummer Präfix (Anfangsteilwort) einer anderen Gödelnummer sein darf.

Gödelnummern

Wir entwickeln nun eine eindeutige präfixfreie Kodierung, die einer Turingmaschine M ein Wort $\langle M \rangle$ über dem Alphabet $\{0, 1\}$ zuordnet.

Definition

Wir nennen die Kodierung $\langle M \rangle$ die **Gödelnummer** der Turingmaschine M .

- ▶ *Präfixfrei* bedeutet, dass keine Gödelnummer Präfix (Anfangsteilwort) einer anderen Gödelnummer sein darf.
- ▶ Um Präfixfreiheit zu erreichen, vereinbaren wir, dass alle Gödelnummern mit 111 beginnen und auf 111 enden und ansonsten der Teilstring 111 nicht in der Kodierung vorkommt.

Realisierung von Gödelnummern

Zur präfixfreien Kodierung von TMen gibt es viele Möglichkeiten. Wir stellen jetzt eine mögliche Definition der Gödelnummer vor.

Realisierung von Gödelnummern

Zur präfixfreien Kodierung von TMen gibt es viele Möglichkeiten. Wir stellen jetzt eine mögliche Definition der Gödelnummer vor.

Wir beschränken uns (O.B.d.A.) auf TMen der folgenden Form:

- ▶ $Q = \{q_1, \dots, q_t\}$ für ein $t \geq 2$.
- ▶ Der Anfangszustand ist q_1 und der Endzustand ist q_2 .
- ▶ $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

Zur Beschreibung von TMen dieser Form müssen wir nur die Übergangsfunktion als Binärstring kodieren.

Realisierung von Gödelnummern

Zur präfixfreien Kodierung von TMen gibt es viele Möglichkeiten. Wir stellen jetzt eine mögliche Definition der Gödelnummer vor.

Wir beschränken uns (O.B.d.A.) auf TMen der folgenden Form:

- ▶ $Q = \{q_1, \dots, q_t\}$ für ein $t \geq 2$.
- ▶ Der Anfangszustand ist q_1 und der Endzustand ist q_2 .
- ▶ $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

Zur Beschreibung von TMen dieser Form müssen wir nur die Übergangsfunktion als Binärstring kodieren.

- ▶ Wir nummerieren das Alphabet durch, indem wir $X_1 = 0$, $X_2 = 1$ und $X_3 = B$ setzen.
- ▶ Auch die möglichen Kopfbewegungen nummerieren wir, indem wir $D_1 = L$, $D_2 = N$ und $D_3 = R$ setzen.

Realisierung von Gödelnummern

Kodierung der Übergangsfunktion

- ▶ Der Übergang $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_\ell, D_m)$ wird kodiert durch den Binärstring

$$0^i 10^j 10^k 10^\ell 10^m .$$

Realisierung von Gödelnummern

Kodierung der Übergangsfunktion

- ▶ Der Übergang $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_\ell, D_m)$ wird kodiert durch den Binärstring

$$0^i 10^j 10^k 10^\ell 10^m .$$

- ▶ Die Kodierung des t -ten Übergangs bezeichnen wir mit $\text{code}(t)$.

Realisierung von Gödelnummern

Kodierung der Übergangsfunktion

- Der Übergang $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_\ell, D_m)$ wird kodiert durch den Binärstring

$$0^i 10^j 10^k 10^\ell 10^m .$$

- Die Kodierung des t -ten Übergangs bezeichnen wir mit $\text{code}(t)$.
- Die Gödelnummer einer TM M mit s Übergängen ist dann

$$\langle M \rangle = 111 \text{code}(1) 11 \text{code}(2) 11 \dots 11 \text{code}(s) 111 .$$

Beispielkodierung



$\Sigma = \{0, 1\}$

$\Gamma = \{0, 1, B\}$

$Q = \{q_1, q_2, q_3\}$

Start Ende Blank

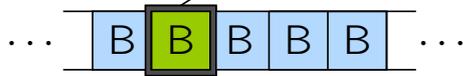
q_1

q_2

B

δ	0	1	B
q_1	(q_1, B, R)	(q_3, B, R)	(q_2, B, N)
q_3	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, 0, R)$	(q_1, B, L)

Beispielkodierung



$\Sigma = \{0, 1\}$ Start Ende Blank
 $\Gamma = \{0, 1, B\}$ q_1 q_2 B
 $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$

δ	0	1	B
q_1	(q_1, B, R)	(q_3, B, R)	(q_2, B, N)
q_3	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, 0, R)$	(q_1, B, L)

111

111

Beispielkodierung



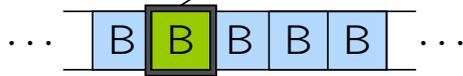
$\Sigma = \{0, 1\}$ Start Ende Blank
 $\Gamma = \{0, 1, B\}$ q_1 q_2 B
 $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$

δ	0	1	B
q_1	(q_1, B, R)	(q_3, B, R)	(q_2, B, N)
q_3	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, 0, R)$	(q_1, B, L)

111 0101010001000

111

Beispielkodierung



$\Sigma = \{0, 1\}$ Start Ende Blank
 $\Gamma = \{0, 1, B\}$ q_1 q_2 B
 $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$

δ	0	1	B
q_1	(q_1, B, R)	(q_3, B, R)	(q_2, B, N)
q_3	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, 0, R)$	(q_1, B, L)

111 0101010001000 11 0100100010001000

111

Beispielkodierung



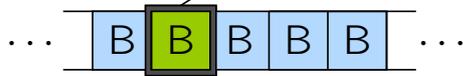
$\Sigma = \{0, 1\}$ Start Ende Blank
 $\Gamma = \{0, 1, B\}$ q_1 q_2 B
 $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$

δ	0	1	B
q_1	(q_1, B, R)	(q_3, B, R)	(q_2, B, N)
q_3	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, 0, R)$	(q_1, B, L)

111 0101010001000 11 0100100010001000 11 010001001000100

111

Beispielkodierung



$\Sigma = \{0, 1\}$ Start Ende Blank
 $\Gamma = \{0, 1, B\}$ q_1 q_2 B
 $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$

δ	0	1	B
q_1	(q_1, B, R)	(q_3, B, R)	(q_2, B, N)
q_3	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, 0, R)$	(q_1, B, L)

111 0101010001000 11 0100100010001000 11 010001001000100 11
 00010101001000 11 000100100101000 11 000100010100010 111

Beispielkodierung



$\Sigma = \{0, 1\}$ Start Ende Blank
 $\Gamma = \{0, 1, B\}$ q_1 q_2 B
 $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$

δ	0	1	B
q_1	(q_1, B, R)	(q_3, B, R)	(q_2, B, N)
q_3	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, 0, R)$	(q_1, B, L)

111 0101010001000 11 0100100010001000 11 010001001000100 11
 00010101001000 11 000100100101000 11 000100010100010 111

Implementierung der universellen TM

Als Eingabe erhält die universelle TM U ein Wort der Form $\langle M \rangle w$ für beliebiges $w \in \{0, 1\}^*$.

Implementierung der universellen TM

Als Eingabe erhält die universelle TM U ein Wort der Form $\langle M \rangle w$ für beliebiges $w \in \{0, 1\}^*$.

Wir implementieren U zunächst in Form einer 3-Band-TM:

- ▶ Band 1 von U simuliert das Band der TM M .

Implementierung der universellen TM

Als Eingabe erhält die universelle TM U ein Wort der Form $\langle M \rangle w$ für beliebiges $w \in \{0, 1\}^*$.

Wir implementieren U zunächst in Form einer 3-Band-TM:

- ▶ Band 1 von U simuliert das Band der TM M .
- ▶ Band 2 von U enthält die Gödelnummer von M .

Implementierung der universellen TM

Als Eingabe erhält die universelle TM U ein Wort der Form $\langle M \rangle w$ für beliebiges $w \in \{0, 1\}^*$.

Wir implementieren U zunächst in Form einer 3-Band-TM:

- ▶ Band 1 von U simuliert das Band der TM M .
- ▶ Band 2 von U enthält die Gödelnummer von M .
- ▶ Auf Band 3 speichert U den jeweils aktuellen Zustand von M .

Implementierung der universellen TM

Initialisierung:

- ▶ U überprüft, ob die Eingabe eine korrekte Gödelnummer enthält. Falls nein, Fehlerausgabe.

Implementierung der universellen TM

Initialisierung:

- ▶ U überprüft, ob die Eingabe eine korrekte Gödelnummer enthält. Falls nein, Fehlerausgabe.
- ▶ U kopiert die Gödelnummer auf Band 2 und schreibt die Kodierung des Anfangszustands auf Band 3.

Implementierung der universellen TM

Initialisierung:

- ▶ U überprüft, ob die Eingabe eine korrekte Gödelnummer enthält. Falls nein, Fehlerausgabe.
- ▶ U kopiert die Gödelnummer auf Band 2 und schreibt die Kodierung des Anfangszustands auf Band 3.
- ▶ U bereitet Band 1 so vor, dass es nur das Wort w enthält. Der Kopf steht auf dem ersten Zeichen von w .

Implementierung der universellen TM

Initialisierung:

- ▶ U überprüft, ob die Eingabe eine korrekte Gödelnummer enthält. Falls nein, Fehlerausgabe.
- ▶ U kopiert die Gödelnummer auf Band 2 und schreibt die Kodierung des Anfangszustands auf Band 3.
- ▶ U bereitet Band 1 so vor, dass es nur das Wort w enthält. Der Kopf steht auf dem ersten Zeichen von w .

Laufzeit?

Implementierung der universellen TM

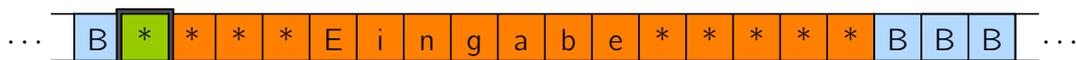
Initialisierung:

- ▶ U überprüft, ob die Eingabe eine korrekte Gödelnummer enthält. Falls nein, Fehlerausgabe.
- ▶ U kopiert die Gödelnummer auf Band 2 und schreibt die Kodierung des Anfangszustands auf Band 3.
- ▶ U bereitet Band 1 so vor, dass es nur das Wort w enthält. Der Kopf steht auf dem ersten Zeichen von w .

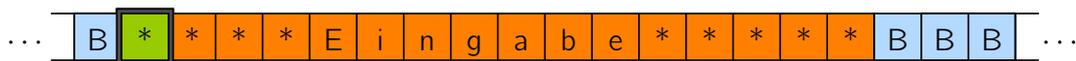
Laufzeit? – Die Laufzeit ist $O(1)$, wenn wir die Kodierungslänge von M als Konstante ansehen.

Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



Initialisierung der universellen Maschine U



Implementierung der universellen TM

Simulation eines Schritts von M :

U sucht zu dem Zeichen an der Kopfposition auf Band 1 und dem Zustand auf Band 3 die Kodierung des entsprechenden Übergangs von M auf Band 2.

Implementierung der universellen TM

Simulation eines Schritts von M :

U sucht zu dem Zeichen an der Kopfposition auf Band 1 und dem Zustand auf Band 3 die Kodierung des entsprechenden Übergangs von M auf Band 2.

Wie in der Übergangsfunktion beschrieben

- ▶ aktualisiert U die Inschrift auf Band 1,
- ▶ bewegt U den Kopf auf Band 1, und
- ▶ verändert U den auf Band 3 abgespeicherten Zustand von M .

Implementierung der universellen TM

Simulation eines Schritts von M :

U sucht zu dem Zeichen an der Kopfposition auf Band 1 und dem Zustand auf Band 3 die Kodierung des entsprechenden Übergangs von M auf Band 2.

Wie in der Übergangsfunktion beschrieben

- ▶ aktualisiert U die Inschrift auf Band 1,
- ▶ bewegt U den Kopf auf Band 1, und
- ▶ verändert U den auf Band 3 abgespeicherten Zustand von M .

Laufzeit eines Simulationsschrittes: $O(1)$.

Implementierung der universellen TM

Simulation eines Schritts von M :

U sucht zu dem Zeichen an der Kopfposition auf Band 1 und dem Zustand auf Band 3 die Kodierung des entsprechenden Übergangs von M auf Band 2.

Wie in der Übergangsfunktion beschrieben

- ▶ aktualisiert U die Inschrift auf Band 1,
- ▶ bewegt U den Kopf auf Band 1, und
- ▶ verändert U den auf Band 3 abgespeicherten Zustand von M .

Laufzeit eines Simulationsschrittes: $O(1)$.

Das bedeutet, U simuliert M mit konstantem Zeitverlust!

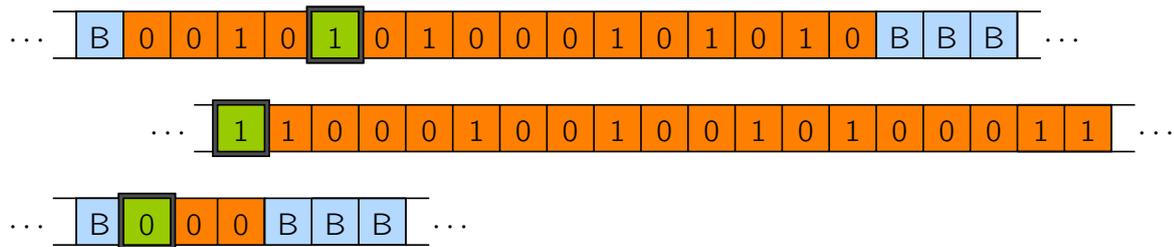
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

simulierende universelle Maschine U



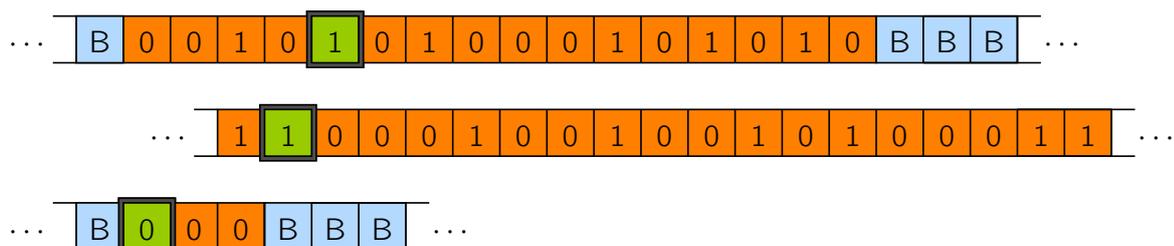
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



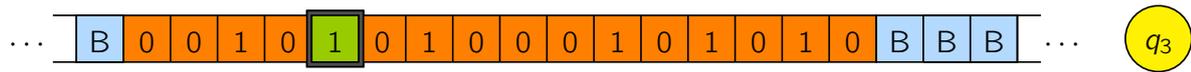
δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

simulierende universelle Maschine U



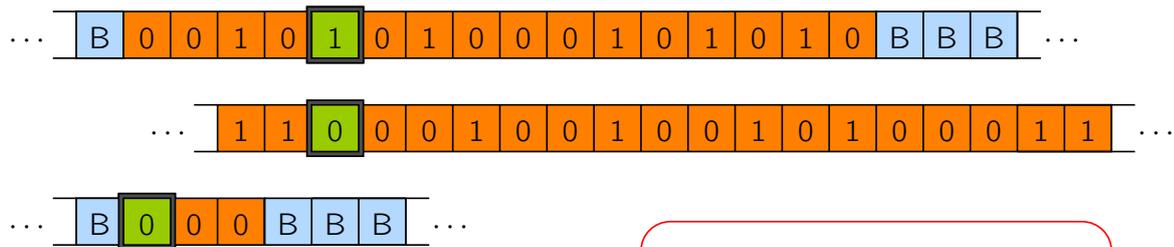
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

simulierende universelle Maschine U



Vergleiche Band 3 mit Band 2

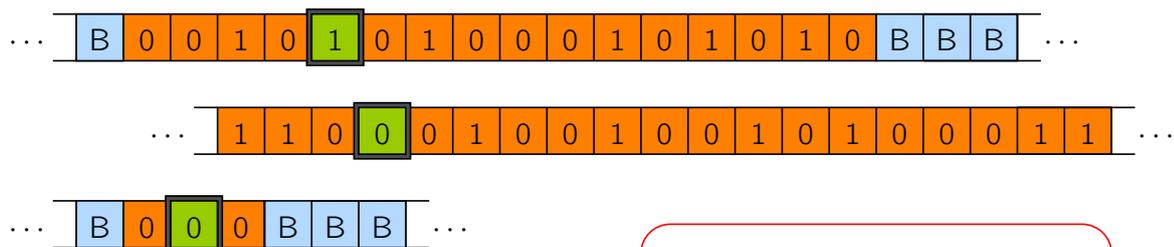
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

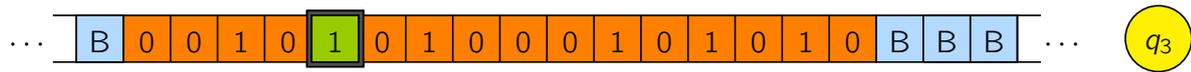
simulierende universelle Maschine U



Vergleiche Band 3 mit Band 2

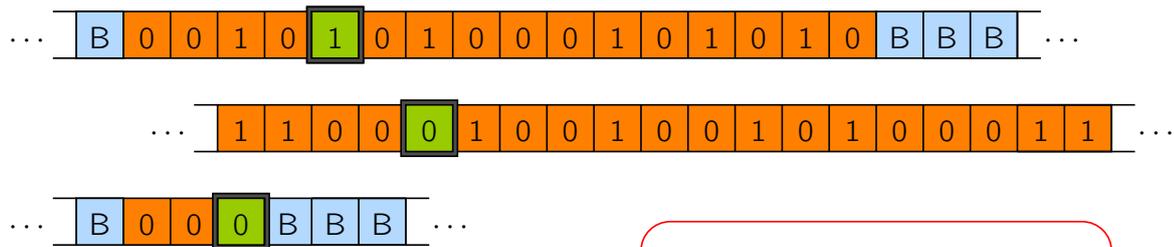
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

simulierende universelle Maschine U



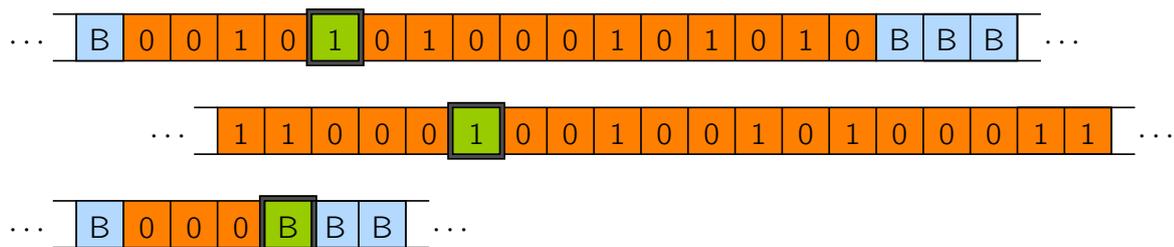
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



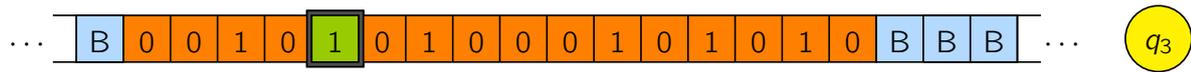
δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

simulierende universelle Maschine U



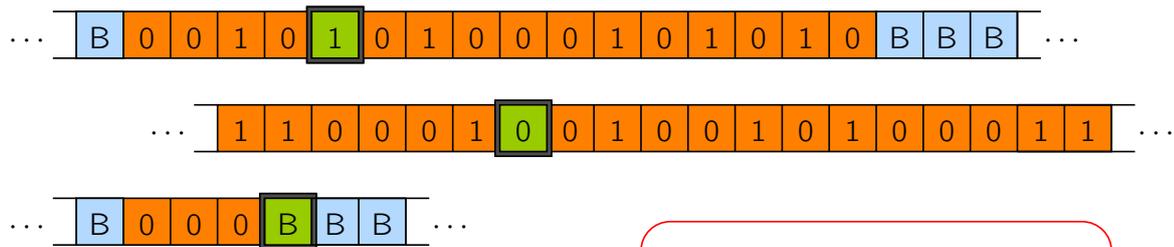
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

simulierende universelle Maschine U



Vergleiche Band 2 mit Band 1

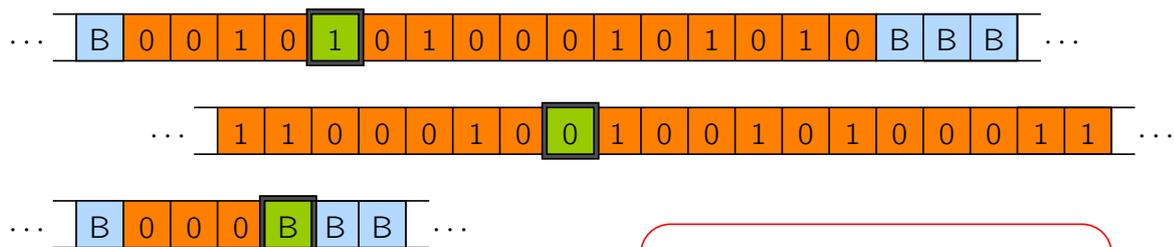
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

simulierende universelle Maschine U



Vergleiche Band 2 mit Band 1

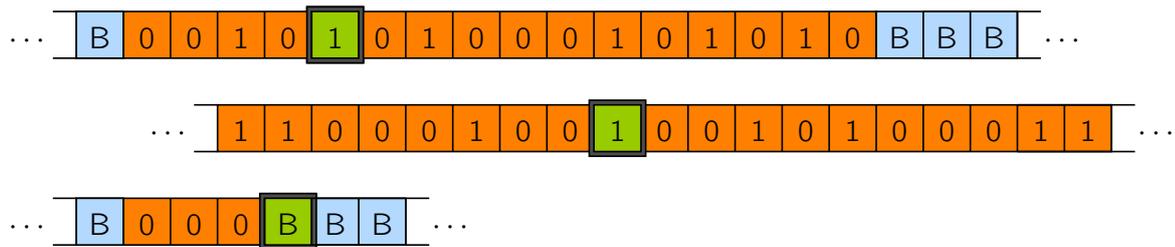
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

simulierende universelle Maschine U



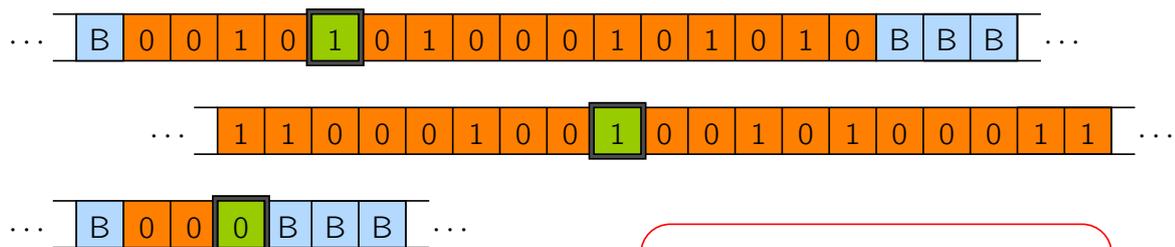
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

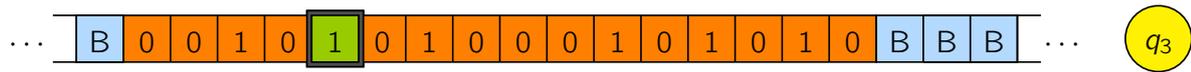
simulierende universelle Maschine U



Update von Band 3

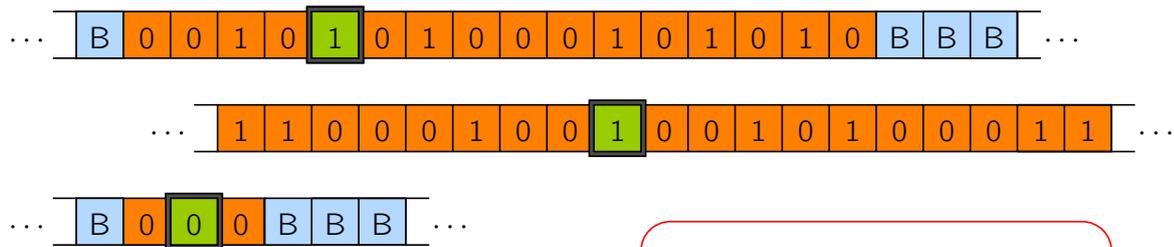
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

simulierende universelle Maschine U



Update von Band 3

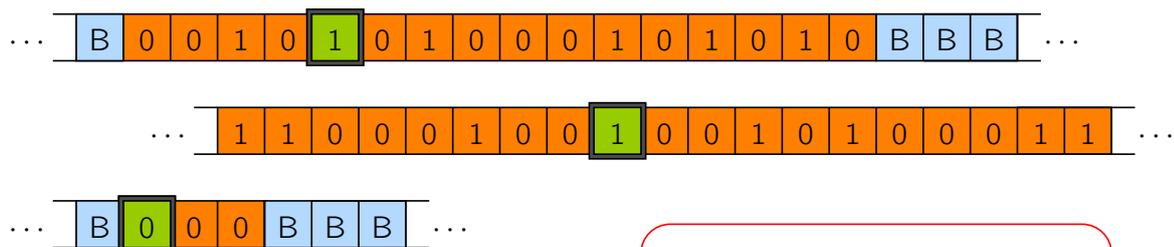
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

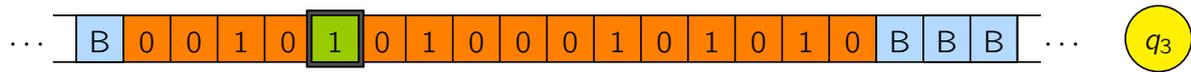
simulierende universelle Maschine U



Update von Band 3

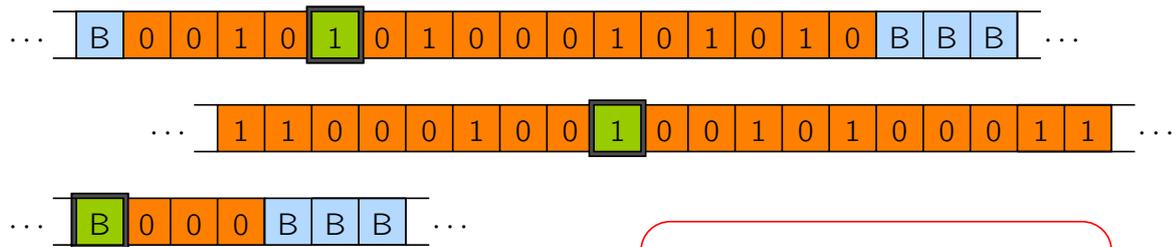
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

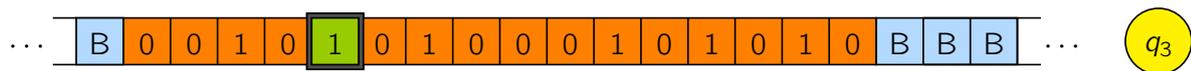
simulierende universelle Maschine U



Update von Band 3

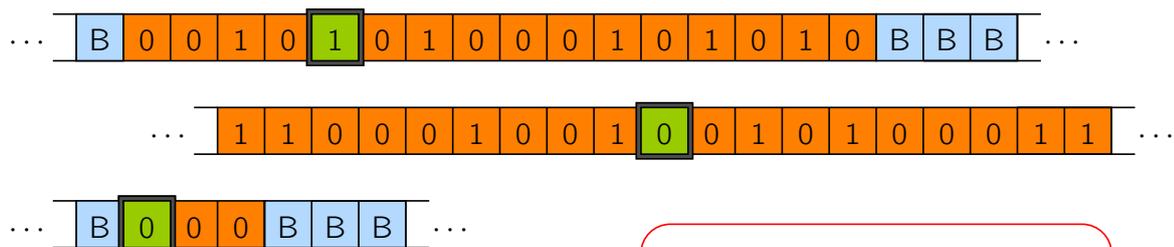
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

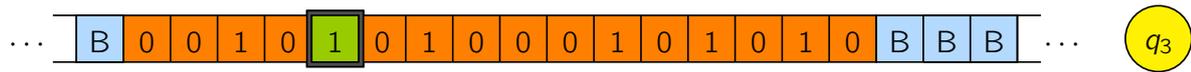
simulierende universelle Maschine U



Update von Band 3

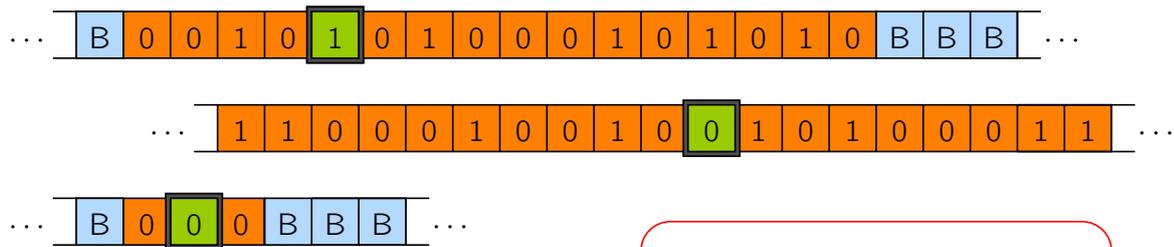
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

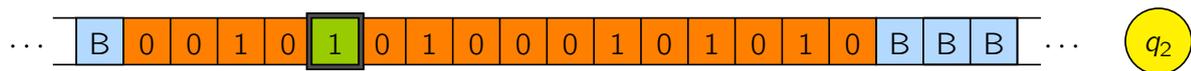
simulierende universelle Maschine U



Update von Band 3

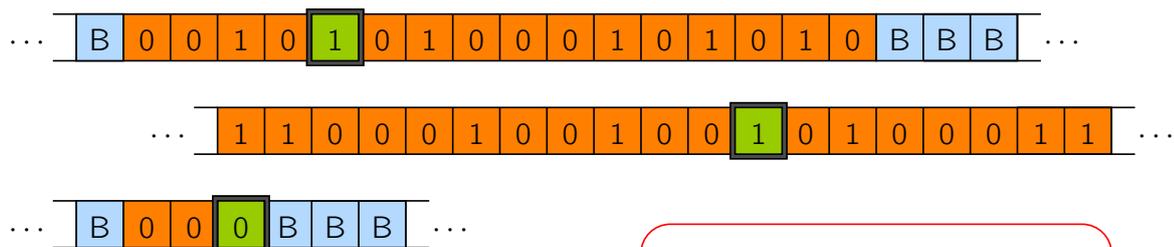
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

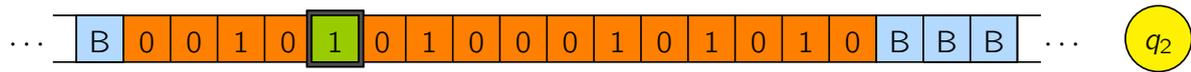
simulierende universelle Maschine U



Update von Band 3

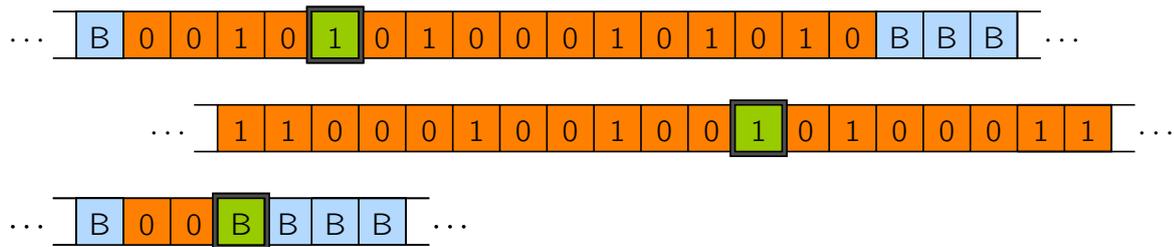
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

simulierende universelle Maschine U



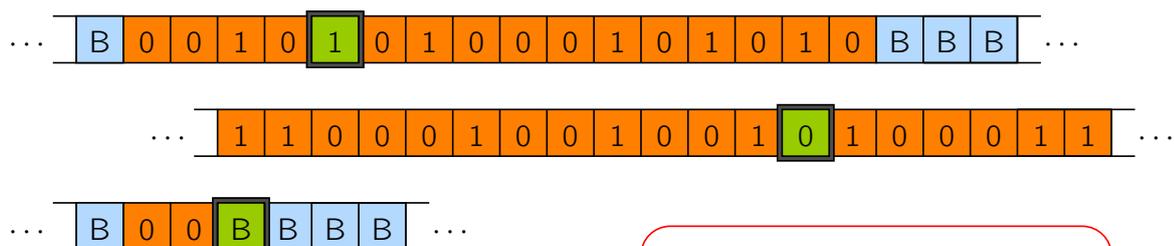
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

simulierende universelle Maschine U



Update Eintrag Band 1

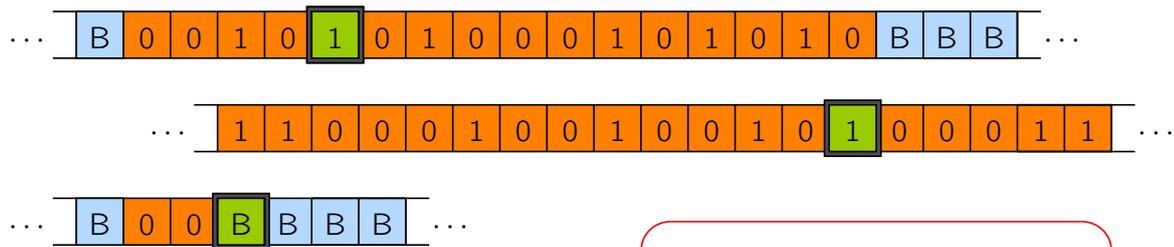
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

simulierende universelle Maschine U



Update Eintrag Band 1

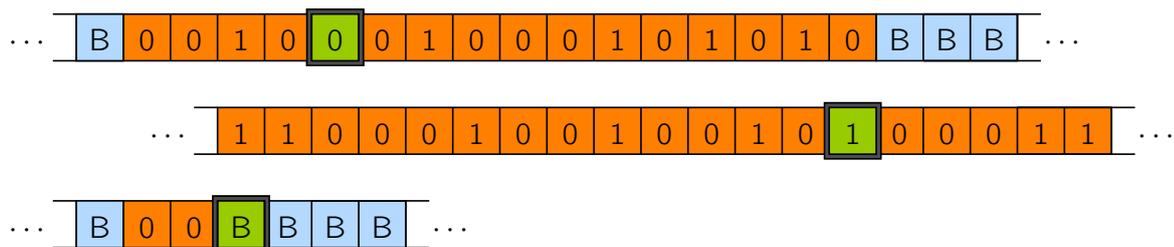
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



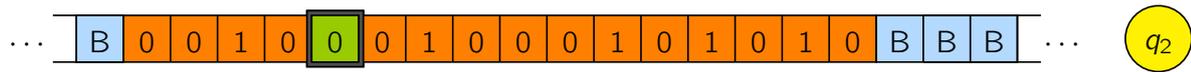
δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

simulierende universelle Maschine U



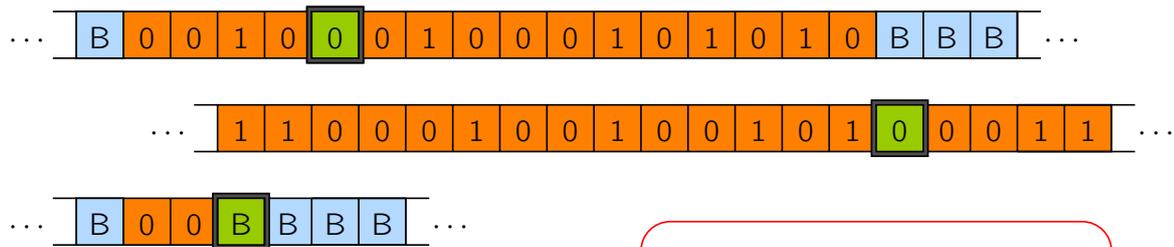
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

simulierende universelle Maschine U



Update Kopfposition Band 1

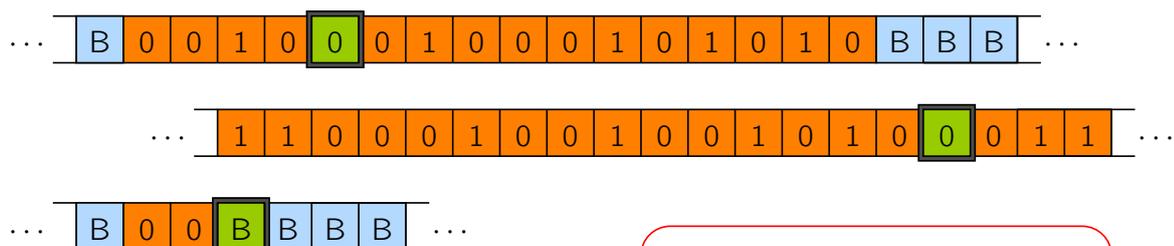
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

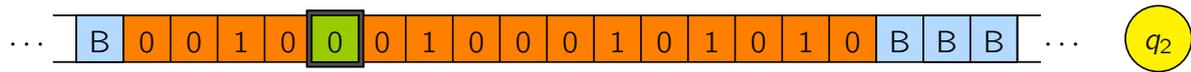
simulierende universelle Maschine U



Update Kopfposition Band 1

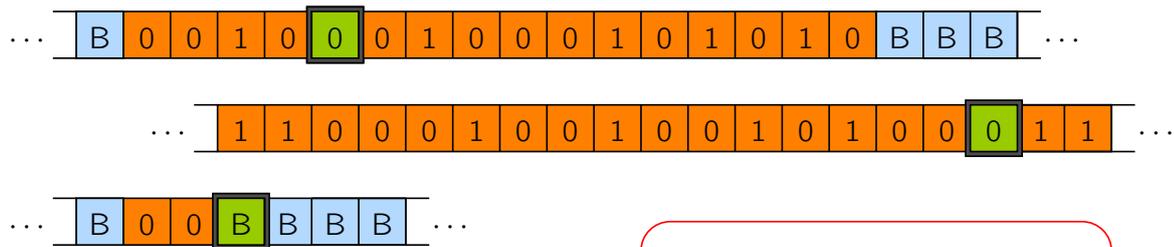
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

simulierende universelle Maschine U



Update Kopfposition Band 1

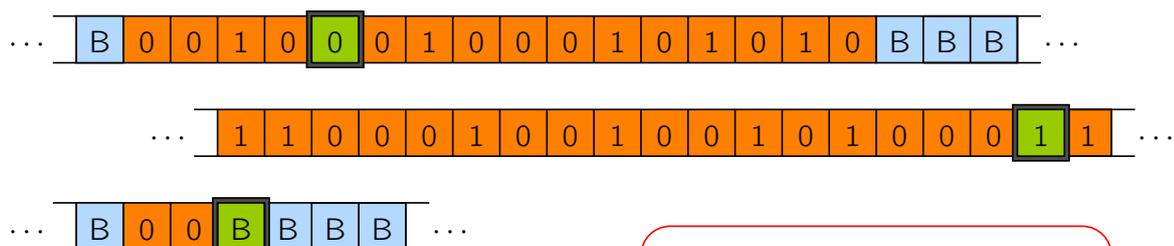
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

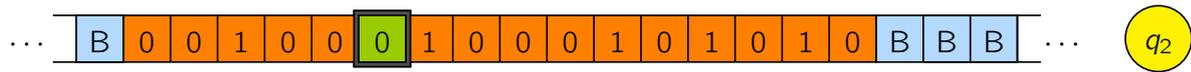
simulierende universelle Maschine U



Update Kopfposition Band 1

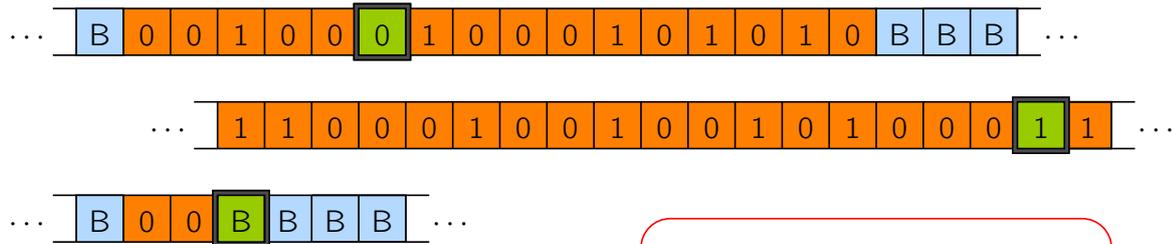
Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine M



δ	0	1	B
q_1			
q_2			
q_3		$(q_2, 0, R)$	

simulierende universelle Maschine U



Update Kopfposition Band 1

Implementierung der universellen TM

Können wir dieses Ergebnis auch mit einer (1-Band-)TM erreichen?

Implementierung der universellen TM

Können wir dieses Ergebnis auch mit einer (1-Band-)TM erreichen?

Natürlich können wir die beschriebene 3-Band-TM auf der 1-Band TM mit mehreren Spuren simulieren.

Implementierung der universellen TM

Können wir dieses Ergebnis auch mit einer (1-Band-)TM erreichen?

Natürlich können wir die beschriebene 3-Band-TM auf der 1-Band TM mit mehreren Spuren simulieren.

Aber bei Verwendung dieser Simulation handeln wir uns einen quadratischen Zeitverlust ein.

Implementierung der universellen TM

Können wir dieses Ergebnis auch mit einer (1-Band-)TM erreichen?

Natürlich können wir die beschriebene 3-Band-TM auf der 1-Band TM mit mehreren Spuren simulieren.

Aber bei Verwendung dieser Simulation handeln wir uns einen quadratischen Zeitverlust ein.

Wir erhalten eine **universelle 1-Band-TM mit konstantem Zeitverlust**, wenn wir ...

Implementierung der universellen TM

Können wir dieses Ergebnis auch mit einer (1-Band-)TM erreichen?

Natürlich können wir die beschriebene 3-Band-TM auf der 1-Band TM mit mehreren Spuren simulieren.

Aber bei Verwendung dieser Simulation handeln wir uns einen quadratischen Zeitverlust ein.

Wir erhalten eine **universelle 1-Band-TM mit konstantem Zeitverlust**, wenn wir ... die Gödelnummer auf Spur 2 und den Zustand auf Spur 3 mit dem Kopf der TM M mitführen.